第 2 章　一维随机变量及其分布

概率论的另一个重要概念是随机变量的概念,随机变量的引入,使概率论的研究由个别随机事件扩大为随机变量所表征的随机现象的研究,本章将主要介绍离散型随机变量和连续型随机变量及其分布.

2.1　随机变量

在第 1 章里,观察一个随机现象,其样本点可以是数量性质的,也可以是非数量性质的. 前者如抛一颗均匀的骰子,可能出现的点数是 1 点,2 点,…,6 点;后者如掷一枚均匀的硬币,可能出现正面,也可能出现反面,现在约定:“出现正面” 记为 1,“出现反面” 记为 0. 无论是哪一种情形,都体现出这样的共同点:对随机试验的每一个可能结果,有唯一一个实数与之对应,这种对应关系实际上定义了样本空间 Ω 上的函数,通常记作 $X = X(\omega),\omega \in \Omega$.

定义　设 $X = X(\omega)$ 是定义在样本空间 Ω 上的实值单值函数,称 $X = X(\omega)$ 为一维随机变量,随机变量通常用大写字母 $X,Y,Z,W,\cdots$ 表示.

图 2-1 给出了样本点 ω 与实数 $X = X(\omega)$ 对应的示意图.

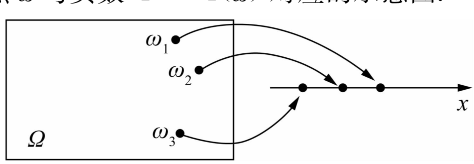

图 2-1

这个定义表明:随机变量 X 是样本点 ω 的一个函数,这个函数可以是不同样本点对应不同的实数,也允许多个样本点对应同一个实数,这个函数的自变量(样本点)可以是数,也可以不是数,但因变量一定是实数.

根据前面的讨论我们可以知道:对试验结果 ω 本身就是一个数的随机试验,可令 $X = X(\omega) = \omega$,则 X 就是一个随机变量,例如:

掷一颗骰子,出现的点数 X 是一个随机变量.

每天进入某超市的顾客数 Y;顾客购买商品的件数 U;顾客排队等候付款的时间 V;电视机的寿命 T 都是随机变量.

而对于样本点本身不是数的随机试验,这时可根据研究需要设计随机变量,请看下面的例子.

【例 2-1】 检查一个产品，只考察其合格与否，则其样本空间为$\Omega=\{$合格品，不合格品$\}$. 这时可设计一个随机变量 X 如下：

$$X=\begin{cases}1,\ \omega=\text{合格品};\\0,\ \omega=\text{不合格品}.\end{cases}$$

【例 2-2】 在第 1 章第 1.2 节的例 1-5 中，将一枚硬币抛掷两次，感兴趣的是两次投掷中出现 H 的总次数，而对 H，T 出现的顺序不关心，比如说，我们只关心出现 H 的总次数是 1，而不在乎出现的是"HT"还是"TH"，以 X 表示两次投掷中出现 H 的总次数，那么，对于样本空间$\Omega=\{\omega\}=\{HH,HT,TH,TT\}$中的每一个样本点$\omega$，$X$都有一个值与之对应，即有

样本点 ω	HH	HT	TH	TT
X	2	1	1	0

这样设计出来的 X 也是一个随机变量.

随机变量的取值随试验的结果而定，而试验的各个结果的出现有一定的概率，因而随机变量的取值有一定的概率. 例如，在例 2-1 中，若假定产品的合格率为 0.9，则 $P\{X=1\}=0.9$，且 $P\{X=0\}=0.1$. 在例 2-2 中 X 取值为 1，记为$\{X=1\}$，对应的样本点的集合 $A=\{HT,TH\}$，这是一个事件，当且仅当事件 A 发生时有$\{X=1\}$发生，我们称概率 $P(A)=P\{HT,TH\}$ 为 $|X=1|$ 的概率，即 $P\{X=1\}=P(A)=\dfrac{1}{2}$. 以后，将事件 $A=\{HT,TH\}$ 说成事件$\{X=1\}$. 类似地有

$$P\{X\leqslant 1\}=P\{HT,TH,TT\}=\frac{3}{4}.$$

一般地，若 I 是一个实数集合，$\{X\in I\}$ 记为事件 B，即 $B=\{\omega\mid X(\omega)\in I\}$，于是

$$P\{X\in I\}=P(B)=P\{\omega\mid X(\omega)\in I\}.$$

随机变量的取值随试验的结果而定，在试验之前不能预知它取什么值，且它的取值有一定的概率. 这些性质显示了随机变量与普通函数有着本质的差异.

引入随机变量，可以将对随机事件的研究转化为对随机变量的研究，进一步地，有可能利用数学分析的方法对随机试验的结果进行深入广泛的研究和讨论.

按照随机变量可能取值的情况，可以把它们分为两类：离散型随机变量和非离散型随机变量，而非离散型随机变量中最重要的是连续型随机变量. 因此，本章主要研究离散型及连续型这两种随机变量.

习题 2-1

1. 投掷一枚骰子，以 X 表示其出现的点数，求 $P\{X=i\mid(u=1,2,\cdots,6)\}$ 及 $P\{X\geqslant 4\}$.

2. 检查两个产品，将每个产品合格用"1"表示，产品不合格用"0"表示，则有 4 个样本点：$\omega_1=(0,0)$，$\omega_2=(1,0)$，$\omega_3=(0,1)$，$\omega_4=(1,1)$. 以 X 表示"两个产品中的合格品数"

(1) 写出 X 与样本点之间的对应关系；

(2) 若此种产品的合格品率为 p，求 $P\{X=1\}$.

2.2 离散型随机变量

定义 如果随机变量的全部可能取的值只有有限个或可列无限多个，则称这种随机变量为离散型随机变量，

如例 2-1 中的随机变量 X，它只可能取 0，1 两个值；又如某城市 120 急救电话台一昼夜收到的呼唤次数 X，它可能取 0，1，2，⋯ 可列无限个值，这些都是离散型随机变量.

一般地，设离散型随机变量 X 所有可能取的值为 $x_k(k=1,2,\cdots)$，X 取各个可能值的概率，即事件 $\{X=x_k\}$ 的概率为

$$P\{X=x_k\}=p_k, k=1,2,\cdots, \quad \text{式(1)}$$

称式(1) 为**离散型随机变量 X 的分布律.**

分布律也可以直观地用下面的表格来表示：

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

由概率的定义，式(1) 中的 p_k 应满足以下条件：

1° $p_k \geqslant 0, k=1,2,\cdots$；

2° $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$.

知道了离散型随机变量的分布律，也就不难计算随机变量落在某一区间内的概率. 因此，分布律全面地描述了离散型随机变量的统计规律.

【例 2-3】 某系统有两台机器相互独立地运转，设第一台与第二台机器发生故障的概率分别为 0.1，0.2. 以 X 表示系统中发生故障的机器数，求 X 的分布律.

解 设 A_i 表示事件“第 i 台机器发生故障”，$i=1,2$，则

$$P\{X=0\}=P(\overline{A}_1\,\overline{A}_2)=0.9\times 0.8=0.72,$$

$$P\{X=1\}=P(A_1\,\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1 A_2)=0.1\times 0.8+0.9\times 0.2=0.26,$$

$$P\{X=2\}=P(A_1A_2)=0.1\times 0.2=0.002.$$

故所求的概率分布为：

X	0	1	2
p	0.72	0.26	0.02

下面介绍三种重要的离散型随机变量的分布.

2.2.1 (0－1) 分布

设随机变量 X 只可能取 0 与 1 两个值，它的分布律是

$$P\{X=k\}=p^k q^{1-k}, k=0,1, p+q=1(0<p<1), \qquad \text{式(2)}$$

则称 X 服从**(0－1) 分布或两点分布**.

(0－1) 分布的分布律也可写成：

X	0	1
p	q	p

对于一个随机试验，如果它的样本空间只包含两个元素，即 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$，我们总能在 Ω 上定义一个服从(0－1) 分布的随机变量

$$X=X(\omega)=\begin{cases}0, & \text{当 } \omega=\omega_1 \\ 1, & \text{当 } \omega=\omega_2\end{cases}$$

来描述这个随机试验的结果. 例如，检查产品的质量是否合格，对新生婴儿的性别进行登记，检验种子是否发芽以及前面多次讨论过的“抛硬币”试验都可以用(0－1) 分布的随机变量来描述.

2.2.2　伯努利试验与二项分布

设试验 E 只有两个可能结果：A 及 $\overline{A}$，则称 E 为**伯努利(Bernoulli) 试验**，设 $P(A)=p(0<p<1)$，此时 $P(\overline{A})=1-p$. 将 E 独立地重复地进行 n 次，则称这一串重复的独立试验为 **n 重伯努利试验**.

这里“重复”是指在每次试验中 $P(A)=p$ 保持不变；“独立”是指各次试验的结果互不影响，即若以 C_i 记第 i 次试验的结果，C_i 为 A 或 $\overline{A}$，$i=1,2,\cdots,n$，那么“独立”是指

$$P(C_1C_2\cdots C_n)=P(C_1)P(C_2)\cdots P(C_n).$$

n 重伯努利试验是一种非常重要的概率模型，它是在“同样条件下独立地进行重复试验或观察”的一种数学模型，有着广泛的实际应用，也是研究得最多的模型之一.

例如，E 是抛一枚硬币观察得到正面或反面，A 表示得正面，这是一个伯努利试验，如将硬币抛 n 次，就是 n 重伯努利试验，又如检查一件产品的质量，若 A 表示得到合格品，$\overline{A}$ 表示得到次品，这也是一个伯努利试验，从一大批同种产品中连续取出 n 件作放回抽样，这就是 n 重伯努利试验，在 n 重伯努利试验中，我们主要关心的是事件 A(或事件 $\overline{A}$) 发生的次数.

以 X 表示 n 重伯努利试验中事件 A 出现的次数，X 是一个随机变量，它所有可能的取值为 $0,1,2,\cdots,n$，现在我们来求它的分布律.

若以 B_k 记 n 重伯努利试验中事件 A 正好出现 k 次这一事件，即事件 $\{X=k\}$，而以 A_i 表示第 i 次试验中出现事件 A，以 $\overline{A}_i$ 表示第 i 次试验中出现 $\overline{A}$，则

$$B_k=A_1A_2\cdots A_k\overline{A}_{k+1}\cdots\overline{A}_n\cup\cdots\cup\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{n-k}A_{n-k+1}\cdots A_n. \qquad \text{式(3)}$$

右边的每一项表示某 k 次试验出现事件 A，另外 $n-k$ 次试验出现 $\overline{A}$，这种项共有 $\binom{n}{k}$ 个，而且两两互不相容. 由试验的独立性，得

$$P(A_1A_2\cdots A_k\overline{A}_{k+1}\cdots\overline{A}_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_k)P(\overline{A}_{k+1})\cdots P(\overline{A}_n)$$
$$=p^kq^{n-k}$$

其中 $q=1-p$.

同理可得(3)中右边各项所对应的概率均为 p^kq^{n-k}，利用概率的加法定理知

$$P(B_k)=\binom{n}{k}p^kq^{n-k},$$

即

$$P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^kq^{n-k},k=0,1,2,\cdots,n. \qquad 式(4)$$

显然

$$P\{X=k\}\geqslant 0;$$

$$\sum_{k=0}^{n}P\{X=k\}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^kq^{n-k}=(p+q)^n=1,$$

即 $P\{X=k\}$ 满足分布律的两个条件，注意到：$\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$ 刚好是二项式$(p+q)^n$ 的展开式中出现 p^k 的那一项，故我们称随机变量 X 服从参数为 n,p 的二项分布，记为 $X\sim b(n,p)$.

【例 2-4】 已知某类产品的次品率为0.2，现从一大批这类产品中随机地抽查20件，问恰好有 k 件$(k=0,1,\cdots,20)$次品的概率是多少?

解 这是不放回抽样，但由于这批产品的总数很大，且抽查的产品的数量相对于产品的总数来说又很小，因而可以当作放回抽样来处理. 这样做会有一些误差，但误差不大，我们将检查一件产品是否为次品看成是一次试验，检查20件产品相当于做20重伯努利试验. 以 X 记抽出的20件产品中次品的件数，那么，X 是一个随机变量，且有 $X\sim b(20,0.2)$，故所求的概率为

$$P\{X=k\}=\binom{20}{k}(0.2)^k(0.8)^{20-k},k=0,1,\cdots,20.$$

将计算结果列表如下：

k	$P\{X=k\}$	k	$P\{X=k\}$
0	0.012	6	0.109
1	0.058	7	0.055
2	0.137	8	0.022
3	0.205	9	0.007
4	0.218	10	0.002
5	0.175	$\geqslant 11$	<0.001

为了对本题的结果有一个直观了解，我们作出上表的图形，如图2-2所示.

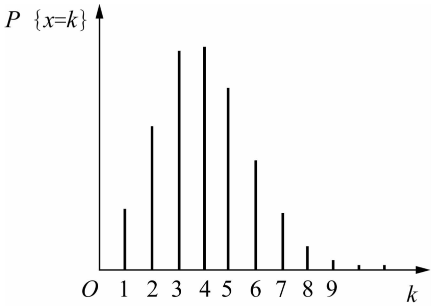

图 2-2

从图 2-2 中可以看出，当 k 增加时，概率 $P\{X=k\}$；先是随之增加，直至达到最大值（本例中当 $k=4$ 时取到最大值），随后单调减少，一般地，对于固定的 n 及 p，二项分布 $b(n,p)$ 都有类似的结果.

*【**例 2-5**】　设某种鸭在正常情况下感染某种传染病的概率为 20%，现新发明两种疫苗 A 和 B. 9 只健康鸭注射疫苗 A 后无一只感染传染病，25 只健康鸭注射疫苗 B 后仅有一只感染，试问应如何评价这两种疫苗，能否初步估计哪种疫苗较为有效？

解　若疫苗 A 完全无效，则注射后鸭受感染的概率仍为 0.2，故 9 只鸭中无一只感染的概率为

$$0.8^9 = 0.1342.$$

同理，若疫苗 B 完全无效，则 25 只鸭中至多有一只感染的概率为

$$0.8^{25} + \binom{25}{1}(0.2)^1\,(0.8)^{24} = 0.0274.$$

因为“25 只健康鸭注射疫苗 B 后仅有一只感染”这个事件已经发生了，我们有理由相信其概率不会太小，如果假设疫苗 B 完全无效，25 只健康鸭至多有一只感染的概率只有 0.0274，这个概率太小，并且比 0.1342 小得多，故假设疫苗 B 完全无效不大可能成立，因此，初步认为疫苗 B 是有效的，并且比疫苗 A 有效.

2.2.3　泊松分布

1. 泊松分布

设随机变量 X 所有可能取的值为 0,1,2,…，而取各个值的概率为

$$P\{X=k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k=0,1,2,\cdots, \qquad \text{式(5)}$$

其中 $\lambda > 0$ 是常数，则称 X 服从参数为 λ 的泊松分布，记为 $X \sim \pi(\lambda)$.

显然，$P\{X=k\} \geqslant 0, k=0,1,2,\cdots$，且有

$$\sum_{k=0}^{\infty} P\{X=k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$$

即 $P\{X=k\}$ 满足分布律的两个条件.

具有泊松分布的随机变量在实际应用中是很多的. 例如电话交换台接到的呼叫次数，公共汽车站到达的乘客数，一本书一页中的印刷错误数以及放射性分裂落到某区域

的质点数等等都服从泊松分布.一般地,泊松分布可以作为描述大量重复试验中稀有事件出现的频数的概率分布情况的数学模型.

【例 2-6】 商店的历史销售记录表明,某种商品每月的销售量服从参数为 $\lambda=10$ 的泊松分布,为了以 95% 以上的概率保证该商品不脱销,问商店在月底至少应进该商品多少件?

解 设商店每月销售某种商品 X 件,月底的进货量为 n 件,按题意要求为

$$P\{X\leqslant n\}\geqslant 0.95,$$

X 服从 $\lambda=10$ 的泊松分布,则有

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{10^k}{k!}e^{-10}\geqslant 0.95.$$

由附录的泊松分布表知

$$\sum_{k=0}^{14}\frac{10^k}{k!}e^{-10}=0.917<0.95,$$

$$\sum_{k=0}^{15}\frac{10^k}{k!}e^{-10}=0.951>0.95.$$

于是,这家商店只要在月底进货该种商品 15 件(假定上个月没有存货),就可以 95% 的概率保证这种商品在下个月内不会脱销.

2. 二项分布的泊松近似

下面的定理给出了二项分布与泊松分布间的近似关系.

定理(泊松定理) 在 n 重伯努利试验中,事件 A 在每次试验中发生的概率为 p_n(注意这与试验的次数 n 有关),如果 $n\to\infty$时,$np_n\to\lambda$($\lambda>0$ 为常数),则对任意给定的非负整数 k,有

$$\lim_{n\to\infty}=\binom{n}{k}p_n^k(1-p_n)^{n-k}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}. \qquad \text{式(6)}$$

该定理的证明略去.

由于泊松定理是在 $np_n\to\lambda$ 条件下获得的,故在计算二项分布 $b(n,p)$ 时,当 n 很大,p 很小,而乘积 $\lambda=np$ 大小适中时,可以用泊松分布作近似,即

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\approx\frac{(np)^k}{k!}e^{-np},k=0,1,2\cdots. \qquad \text{式(7)}$$

【例 2-7】 为保证设备正常工作,需要配备一些维修工,如果各台设备发生故障是相互独立的,且每台设备发生故障的概率都是 0.01.试在以下各种情况下,求设备发生故障而不能及时修理的概率.

(1) 一名维修工负责 20 台设备.

(2) 3 名维修工负责 90 台设备.

(3) 10 名维修工负责 500 台设备.

解 (1) 以 X_1 表示 20 台设备中同时发生故障的台数,则 $X_1\sim b(20,0.01)$.用参数为 $\lambda=np=20\times0.01=0.2$ 的泊松分布作近似计算,得所求概率为

$$P(X_1>1)\approx 1-\sum_{k=0}^{1}\frac{0.2^k}{k!}\mathrm{e}^{-0.2}=1-0.982=0.018.$$

(2) 以 X_2 表示 90 台设备中同时发生故障的台数，则 $X_2\sim b(90,0.01)$. 用参数为 $\lambda=np=90\times 0.01=0.9$ 的泊松分布作近似计算，得所求概率为

$$P(X_2>3)\approx 1-\sum_{k=0}^{3}\frac{0.9^k}{k!}\mathrm{e}^{-0.9}=1-0.987=0.013.$$

注意，此种情况下，不但所求概率比(1) 中有所降低，而且 3 名维修工负责 90 台设备相当于每个维修工负责 30 台设备，工作效率是(1) 中的 1.5 倍.

(3) 以 X_3 表示 500 台设备中同时发生故障的台数，则 $X_3\sim b(500,0.01)$. 用参数为 $\lambda=np=500\times 0.01=5$ 的泊松分布作近似计算，得所求概率为

$$P(X_3>10)\approx 1-\sum_{k=0}^{10}\frac{5^k}{k!}\mathrm{e}^{-5}=1-0.986=0.014.$$

注意，此种情况下所求概率与(2) 中基本上一样，而 10 名维修工负责 500 台设备相当于每个维修工负责 50 台设备，工作效率是(2) 中的 1.67 倍，是(1) 中的 2.5 倍.

由此可知：若干维修工共同负责大量设备的维修，将提高工作的效率.

习 题 2-2

1. 下列表中所列出的是否是某个随机变量的分布律？

(1)

X	0	1	2
p_k	0.2	0.3	0.5

(2)

Y	1	2	3
p_k	0.1	0.3	0.4

(3)

X	1	2	3	…	n	…
p_k	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	…	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	…

2. 设随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{a}{N},k=1,2,\cdots,N$$

试确定常数 a.

3. 一批产品共 100 个，其中有 10 个次品. 求任意取出的 5 个产品中次品数的分布律.

4. 一大楼装有 5 个同类型的供水设备，调查表明在任一时刻每个设备被使用的概率为 0.1，问在同一时刻，

(1) 恰有 2 个设备被使用的概率是多少？

(2) 至少有 3 个设备被使用的概率是多少?

(3) 至多有 3 个设备被使用的概率是多少?

5. 对某一目标进行射击,直至击中为止,如果每次射击命中率为 p,求射击次数的分布律.

6. 从学校乘车到火车站的途中有 3 个交通岗,假设在各个交通岗遇到红灯的事件是相互独立的,并且概率都是$\frac{2}{5}$,设 X 为途中遇到红灯的次数,求随机变量 X 的分布律.

7. 设某城市在一周内发生交通事故的次数服从参数为 0.3 的泊松分布,试问

(1) 在一周内恰好发生 2 次交通事故的概率是多少?

(2) 在一周内至少发生 1 次交通事故的概率是多少?

8. 设 X 服从泊松分布,其分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k=0,1,2,\cdots,$$

问当 k 为何值时,$P\{X=k\}$ 最大?

9. 纺织厂女工照顾 800 个纺锭,每一纺锭在某一短时间内发生断头的概率为 0.005(设短时间内最多只发生一次断头),求在这段时间内总共发生的断头次数超过 2 的概率.(利用泊松定理计算)

2.3 随机变量的分布函数

对于非离散型随机变量 X,其可能取的值不只可列无限个,可以充满某个区间,而且它取某个特定值的概率常常是 0,因此我们所关心的也不再是它取某个特定值的概率.例如测量误差,某种产品的寿命,排队请求服务的等候时间等等,我们感兴趣的是这类随机变量的取值落在某个区间的概率:$P\{x_1<X\leqslant x_2\}$.但由于

$$P\{x_1<X\leqslant x_2\}=P\{X\leqslant x_2\}-P\{X\leqslant x_1\}, \qquad 式(1)$$

所以只需知道形如事件$\{X\leqslant x\}$的概率就可以了,为此,我们引入随机变量的分布函数的概念.

定义 设 X 是一个随机变量,x 是任意实数,函数

$$F(x)=P\{X\leqslant x\} \qquad 式(2)$$

称为 X 的**分布函数**.

分布函数是一个普通的函数,其定义域是整个实数轴.在几何上,它表示随机变量 X 落在实数 x 及 x 左边的概率(图 2-3):

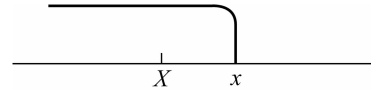

图 2-3

分布函数具有以下基本性质:

1° $0\leqslant F(x)\leqslant 1$.

2° $F(x)$ 是 x 的不减函数.

事实上,由式(1) 及式(2),对于任意实数 $x_1,x_2,x_1<x_2$,有

$$F(x_2)-F(x_1)=P\{x_1<X\leqslant x_2\}\geqslant 0. \qquad 式(3)$$

式(3)说明,若已知 X 的分布函数,就能知道 X 落在任一区间$(x_1,x_2]$上的概率,从这个意义上讲,分布函数完整地描述了随机变量的统计规律性.

3° $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$,$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$.

上面两个式子,可从分布函数 $F(x)$ 的几何意义上加以理解.

4° $F(x+0)=F(x)$,即 $F(x)$ 是右连续的.(证略)

【例 2-8】 设随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	1
p_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

求 X 的分布函数,并求 $P\{0\leqslant X\leqslant 1\}$.

解 由概率的有限可加性,不难求得:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \dfrac{1}{4}, & -1\leqslant x<0,\\ \dfrac{3}{4}, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

$F(x)$ 的图形如图 2-4 所示.

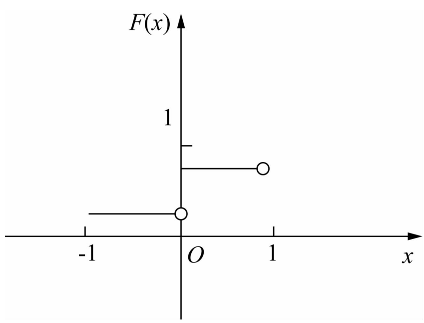

图 2-4

$$\begin{aligned}P\{x\leqslant X\leqslant 1\}&=P\{0<X\leqslant 1\}+P\{X=0\}\\&=F(1)-F(0)+P\{X=0\}=1-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

由图 2-4 可以看到,分布函数 $F(x)$ 的图形是一条阶梯曲线,它在 $x=-1,0,1$ 处有跳跃,其跳跃值分别为 X 取 $-1,0,1$ 的概率$\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4}$.

一般地,设离散型随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=x_k\}=p_k,k=1,2,\cdots.$$

由概率的可列可加性,得 X 的分布函数为

$$F(x)=\sum_{x_k\leqslant x}p_k.$$

这里和式是对所有满足 $x_k\leqslant x$ 的 k 求和. 分布函数 $F(x)$ 在 $x=x_k(k=1,2,\cdots)$ 处有跳

跃,其跳跃值为 $p_k = P\{X = x_k\}$.

【例 2-9】 在区间[1,5]上任意掷一个质点,用 X 表示这个质点与原点的距离,则 X 是一个随机变量,如果这个质点落在[1,5]上任一子区间内的概率与这个区间的长度成正比,求 X 的分布函数.

解 由题意知 $\{1 \leqslant X \leqslant 5\}$ 是一个必然事件,即 $P\{1 \leqslant X \leqslant 5\} = 1$.

若 $x < 1$,则 $\{X \leqslant x\}$ 是不可能事件,$F(x) = 0$.

若 $1 \leqslant x \leqslant 5$,则 $P\{1 \leqslant X \leqslant x\} = k(x-1)$. 特别地取 $x = 5$,由 $P\{1 \leqslant X \leqslant 5\} = 1$ 可得 $k = \dfrac{1}{4}$,从而

$$F(x) = P\{X \leqslant x\} = P\{x < 1\} + P\{1 \leqslant X \leqslant x\} = \frac{1}{4}(x-1).$$

若 $x > 5$,则 $\{X \leqslant x\}$ 是必然事件,$F(x) = 1$.

综合上述,即得 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \dfrac{1}{4}(x-1), & 1 \leqslant x < 5, \\ 1, & x \geqslant 5. \end{cases}$$

$F(x)$ 的图形如图 2-5 所示. 这里,$F(x)$ 是一个定义在$(-\infty, +\infty)$上的一个连续函数,在整个数轴上没有一个跳跃点(这样的随机变量取任何一个确定值的概率为 0). 其中,比例系数 $k = \dfrac{1}{4}$,反映了概率分布在区间[1,5]上任意一个子区间上的密度,由此构造函数

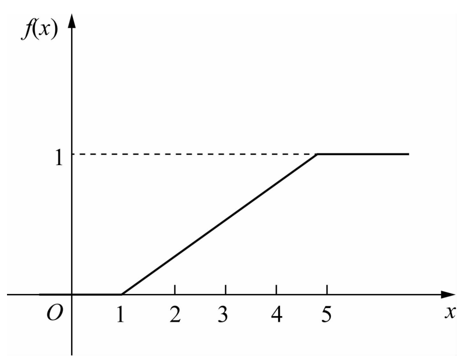

图 2-5

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}, & 1 < x < 5 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

而前面求出的分布函数 $F(x)$,恰好就是非负函数 $f(x)$ 在$(-\infty, x]$上的反常积分,即

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

与离散型随机变量不同,这是另一类十分重要而且常见的随机变量 —— 连续型随机变量,我们将在下节讨论连续型随机变量.

习题 2-3

1. 下列函数是否是某个随机变量的分布函数？

(1)$F(x)=\begin{cases}0, & x<-2,\\ \dfrac{1}{2}, & -2\leqslant x<0,\\ 1, & x\geqslant 0;\end{cases}$

(2)$F(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，$-\infty<x<+\infty$.

2. 设 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}A(1-\mathrm{e}^{-x}), & x\geqslant 0\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

求常数 A 及 $P\{1<X\leqslant 3\}$.

3. 设 X 服从(0－1)分布，其分布律为 $P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}$，$k=0,1$，求 X 的分布函数，并作出图形.

4. 设随机变量的分布律为

X	-2	-1	0	1
p_k	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{10}$

(1) 求 X 的分布函数 $F(x)$，并画出 $F(x)$ 的图形；

(2) 求 $P\{-1\leqslant X\leqslant 1\}$.

5. 一个靶子是半径为 2 米的圆盘，设击中靶上任一同心圆盘上的点的概率与该圆盘的面积成正比，并设射击都能中靶，以 X 表示弹着点与圆心的距离，试求随机变量 X 的分布函数.

2.4　连续型随机变量及其概率密度

定义　对于随机变量 X 的分布函数 $F(x)$，如果存在非负函数 $f(x)$，使对于任意实数 x，有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t, \qquad \text{式(1)}$$

则 X 称为连续型随机变量，其中函数 $f(x)$ 称为 X 的概率密度函数，简称概率密度.（显然，改变概率密度 $f(x)$ 在个别点的函数值不影响分布函数 $F(x)$ 的取值）

由定义知道，概率密度 $f(x)$ 具有以下性质：

1° $f(x)\geqslant 0$.

2° $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$.

3° 对于任意实数 $x_1, x_2, x_1 \leqslant x_2$,有

$$P\{x_1 < X \leqslant x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x.$$

4° 若 $f(x)$ 在点 x 连续,则有 $F'(x) = f(x)$.

性质 1°,2° 是概率密度的两个最基本的性质,由性质 3° 知道,X 落在区间$(x_1, x_2]$上的概率 $P\{x_1 < X \leqslant x_2\}$ 等于区间$(x_1, x_2]$上曲线 $f(x)$ 之下的曲边梯形的面积(如图 2-6 所示). 由性质 4°,对于 $f(x)$ 的连续点 x,有

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{P\{x < X \leqslant x + \Delta x\}}{\Delta x}.$$

上式表明概率密度 $f(x)$ 不是随机变量 X 取值 x 的概率,而是 X 在点 x 的概率分布的密集程度,$f(x)$ 的大小能反映出 X 取 x 附近的值的概率大小. 因此,对于连续型随机变量,用概率密度描述它的分布比分布函数直观. 由此我们还可以知道,若不计高阶无穷小,有

$$P\{x < X \leqslant x + \Delta x\} \approx f(x)\Delta x.$$

这说明 X 落在小区间$(x, x+\Delta x]$上的概率近似为 $f(x)\Delta x$.

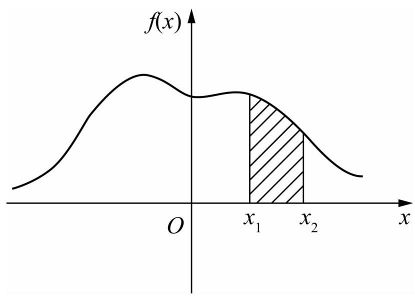

图 2-6

【例 2-10】 设连续型随机变量 X 具有概率密度

$$f(x) = \begin{cases} kx + 1, & 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求:(1) 常数 k;(2)X 的分布函数 $F(x)$;(3)$P\left\{\frac{3}{2} < X \leqslant \frac{5}{2}\right\}$.

解 (1) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$,得$\int_0^2 (kx+1)\mathrm{d}x = 1$,解得 $k = -\frac{1}{2}$.

(2)X 的分布函数为

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ -\frac{1}{4}x^2 + x, & 0 \leqslant x < 2, \\ 1, & x \geqslant 2. \end{cases}$$

(3)$P\left\{\frac{3}{2} < X \leqslant \frac{5}{2}\right\} = F\left(\frac{5}{2}\right) - F\left(\frac{3}{2}\right) = 1 - 0.9375 = 0.0625.$

对于连续型随机变量 X,需要指出的是:其一,分布函数 $F(x)$ 是一个连续函数;其二,X 取任一指定实数值 a 的概率均为 0,即 $P\{X = a\} = 0$. 这样,我们在计算连续型随机

变量落在某一区间的概率时，可以不必区分该区间是开区间或闭区间，例如有

$$P\{a < X \leqslant b\} = P\{a \leqslant X \leqslant b\} = P\{a < X < b\}.$$

此外，尽管 $P\{X = a\} = 0$，但 $\{X = a\}$ 并不是不可能事件. 同样地，一个事件的概率为 1，并不意味着这个事件一定是必然事件.

以后当我们提到一个随机变量 X 的“概率分布”时，指的是它的分布函数；或者，当 X 是连续型时指的是它的概率密度，当 X 是离散型时指的是它的分布律.

下面介绍三种重要的连续型随机变量.

1. 均匀分布

设连续型随机变量 X 具有概率密度

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \qquad \text{式(2)}$$

则称 X 在区间 (a,b) 上服从**均匀分布**，记为 $X \sim U(a,b)$.

易知 $f(x) \geqslant 0$，且 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$.

由式(2) 得 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \leqslant x < b, \\ 1, & x \geqslant b. \end{cases}$$

$f(x)$ 及 $F(x)$ 的图形分别如图 2-7、图 2-8 所示.

从图 2-7 可以看出，在 (a,b) 刚上服从均匀分布的随机变量 X 落在 (a,b) 中任一等长度的子区间内的可能性是相同的，或者说 X 落在 (a,b) 子区间的概率只依赖于子区间的长度，而与子区间的位置无关.

均匀分布在实际问题中较为常见. 例如一个随机数(即任意取的一个实数) 取整后产生的误差以及前面提到的乘客候车时的等候时间等都服从均匀分布.

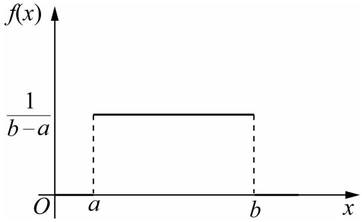

图 2-7

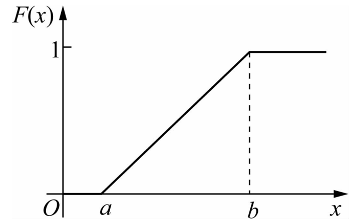

图 2-8

2. 指数分布

设连续型随机变量是 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases} \qquad \text{式(3)}$$

其中 $\lambda > 0$ 为常数，则称 X 服从参数为 λ 的**指数分布**，记为 $X \sim E(\lambda)$.

易知 $f(x) \geqslant 0$，且$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{+\infty} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x = 1$.

由式(3) 得 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

指数分布的概率密度及分布函数分别如图 2-9，图 2-10 所示.

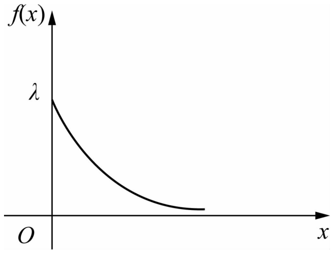

图 2-9

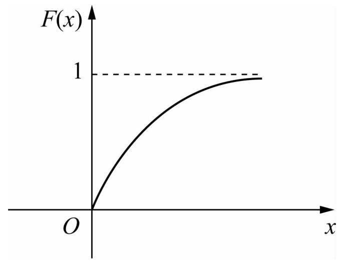

图 2-10

这里，我们指出电子元件的寿命以及顾客排队时等候服务的时间均服从指数分布. 指数分布在可靠性理论与排队论中有广泛的应用.

【例 2-11】 已知某种电子元件的寿命 X(单位：h) 服从参数 $\lambda = \dfrac{1}{1000}$ 的指数分布，求 3 个这样的元件各自独立使用 1000h 至少有一个已损坏的概率.

解 由题意，X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1000}\mathrm{e}^{-\frac{x}{1000}}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

于是

$$P\{X > 1000\} = \int_{1000}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-1}.$$

各元件的寿命是否超过 1000h 是独立的，因此 3 个元件使用 1000h 都未损坏的概率为 e^{-3}，从而至少有一个已损坏的概率为 $1 - \mathrm{e}^{-3}$.

3. 正态分布

设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < +\infty, \qquad \text{式(4)}$$

其中 $\mu, \sigma(\sigma > 0)$ 为常数，则称 X 服从参数为 μ, σ 的正态分布，记为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

显然 $f(x) \geqslant 0$，下面来证明 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$.

令$\dfrac{x-\mu}{\sigma} = t$，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t.$$

利用反常积分$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi},$$

于是$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = 1.$

$f(x)$ 的图形如图 2-11 所示.

由图 2-11 可以清楚地看出，函数 $f(x)$ 的图形关于直线 $x=\mu$ 对称，$f(x)$ 在 $x=\mu$ 处取得最大值. 当 μ 固定时，σ 的值愈小，$f(x)$ 的图形就愈尖；反之，σ 的值愈大，$f(x)$ 的图形就愈平. 当然，$f(x)$ 的图形愈尖，随机变量 X 落在点 μ 附近的概率也愈大，形象地说，正态随机变量的分布规律呈现出“中间大，两头小”的态势.

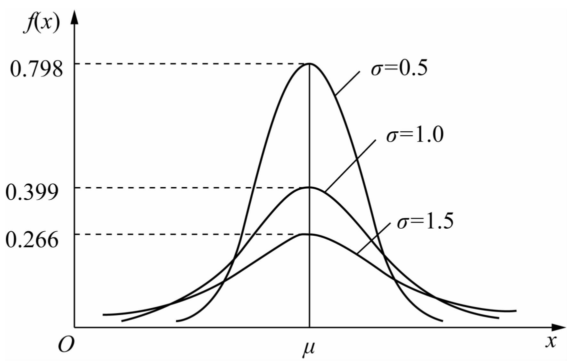

图 2-11

由(4) 式得 X 的分布函数为(如图 2-12)

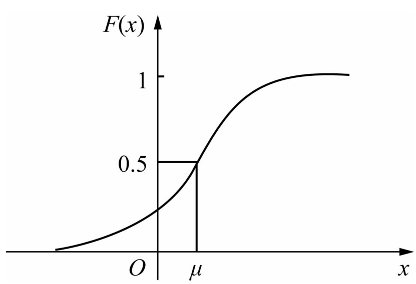

图 2-12

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t,\ -\infty < x < +\infty. \qquad \text{式(5)}$$

特别地，当 $\mu=0,\sigma=1$ 时，称 X 服从标准正态分布，记为 $X\sim N(0,1)$，其概率密度和分布函数分别用 $\varphi(x)$，$\Phi(x)$ 表示，即有

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

易知 $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$. 人们编制了 $\Phi(x)$ 的函数表,可供查用(见附表 2). 关于一般正态分布与标准正态分布,我们有下面的结论,

引理 若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,则 $Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$.

(引理的证明将在下一节给出)

【例 2-12】 已知 $X\sim N(8,4^2)$,求 $P\{X\leqslant 16\}$,$P\{X\leqslant 0\}$ 及 $P\{12<X\leqslant 20\}$.

解 由引理及(5) 式,查表得

$$P\{X\leqslant 16\}=P\left\{\frac{X-8}{4}\leqslant\frac{16-8}{4}\right\}=\Phi(2)=0.9772,$$

$$P\{X\leqslant 0\}=P\left\{\frac{X-8}{4}\leqslant\frac{-8}{4}\right\}=\Phi(-2)=1-\Phi(2)=0.0228,$$

$$\begin{aligned}P\{12<X\leqslant 20\}&=P\left\{\frac{12-8}{4}<\frac{X-8}{4}\leqslant\frac{20-8}{4}\right\}=\Phi(3)-\Phi(1)\\&=0.9987-0.8413=0.1574\end{aligned}$$

【例 2-13】 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,求 X 落在区间$(\mu-k\sigma,\mu+k\sigma)$ 内的概率$(k=1,2,3)$.

解
$$\begin{aligned}P\{|X-\mu|<k\sigma\}&=P\{\mu-k\sigma<X<\mu+k\sigma\}\\&=\Phi(k)-\Phi(-k)\\&=2\Phi(k)-1,\end{aligned}$$

于是

$$P\{|X-\mu|<\sigma\}=2\Phi(1)-1=0.6826,$$
$$P\{|X-\mu|<2\sigma\}=2\Phi(2)-1=0.9544,$$
$$P\{|X-\mu|<3\sigma\}=2\Phi(3)-1=0.9974,$$

则 $\quad P\{|X-\mu|\geqslant 3\sigma\}=1-P\{|X-\mu|<3\sigma\}=0.0026<0.003.$

由此可见,X 落在$(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 以外的概率小于 3‰,由于这一概率很小,在实际问题中常认为相应的事件是不会发生的,基本上可以把区间$(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 看作是随机变量 X 实际可能的取值区间,这一说法称为正态分布的“3σ” 原则.

在自然现象和社会现象中,大量随机变量都服从或近似服从正态分布. 例如,人的身高与体重,测量产生的误差,海洋波浪的高度等等. 事实上,正态分布是概率论与数理统计中最重要的一种分布,这一点我们将在第 5 章里进一步地说明.

为了便于今后在数理统计中的应用,对于标准正态随机变量,按如下方式引入上 α 分位点的定义.

设 $X\sim N(0,1)$,若 u_α 满足条件 $P\{X>u_\alpha\}=\alpha$,$0<\alpha<1$,则称点 u_α 为标准正态分布的上 α 分位点(如图 2-13). 显然由 $\Phi(u_\alpha)=1-\alpha\cdot u_\alpha$ 的值可通过查附表 2 得到.

下面列出几个常用的 u_α 的值.

α	0.001	0.005	0.01	0.025	0.05	0.10
u_α	3.090	2.576	2.327	1.960	1.645	1.282

由 $\varphi(x)$ 的图形的对称性可知:$u_{1-\alpha}=-u_\alpha$.

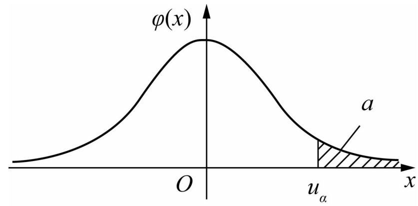

图 2-13

习题 2-4

1. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right), & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 X 的分布函数.

2. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=A\mathrm{e}^{-|x|}$，$-\infty<x<+\infty$，试求

(1) 系数 A；(2) $P\{0<X<1\}$；(3) X 的分布函数.

3. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}A\cos x, & -\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求(1) 系数 A；(2) X 的分布函数；(3) $P\left\{0<X\leqslant\dfrac{\pi}{4}\right\}$.

4. 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \ln x, & 1\leqslant x<\mathrm{e},\\ 1, & x\geqslant \mathrm{e}.\end{cases}$$

(1) 求 $P\{X<2\}$，$P\{0<X\leqslant 3\}$，$P\left\{2<X<\dfrac{5}{2}\right\}$；(2) 求 X 的概率密度 $f(x)$.

5. 设 K 在区间(1,6) 上服从均匀分布，求方程

$$x^2+Kx+1=0$$

有实根的概率.

6. 设顾客在某银行窗口等待服务的时间 X(以分计) 服从指数分布，其概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

某顾客在窗口等待服务，若超过 10min 他就离开，他一个月要到银行 5 次，以 Y 表示他未等到服务而离开窗口的次数，试写出 Y 的分布律，并求 $P\{Y\geqslant 1\}$.

7. 设 $X\sim N(3,2^2)$，(1) 求 $P\{2<X\leqslant 5\}$. $P\{|X|>2\}$，$P\{X>3\}$；(2) 确定 c，使

得 $P\{X>c\}=P\{X\leqslant c\}$；(3) 设 d 满足 $P\{X>d\}\geqslant 0.9$，问 d 至多为多少？

8. 某地抽样调查结果表明，考生的外语成绩(百分制)分布近似于正态分布 $N(72,\sigma^2)$，96 分以上的占考生总数的 2.3%，试求考生的外语成绩在 60 ~ 84 分之间的概率.

2.5 随机变量的函数的分布

在实际问题中，不仅需要研究随机变量，往往还要研究随机变量的函数. 例如，某商品的需求量是一个随机变量，而该商品的销售收入就是需求量的函数；或者测量一个正方形的边长，其结果是一个随机变量，需要求它的面积. 对于这类问题，用数学的语言来描述就是：已知随机变量 X 的概率分布，求其函数 $Y=g(X)$ 的概率分布，这里 $g(\cdot)$ 是已知的连续函数，下面我们来具体地讨论，

【例 2-14】 设随机变量 X 具有以下分布，试求：(1)$Y=2X$，(2)$Z=(X-1)^2$ 的分布律.

X	-1	0	1	2
p_k	0.3	0.2	0.1	0.4

解 (1)Y 的所有可能取值为 $-2,0,2,4$. 由 $P\{Y=2k\}=P\{X=k\}=p_k$，得 Y 的分布律为

Y	-2	0	2	4
p_k	0.3	0.2	0.1	0.4

(2)Z 的所有可能取值为 0,1,4.

$$P\{Z=0\}=P\{(X-1)^2=0\}=P\{X=1\}=0.1,$$
$$P\{Z=1\}=P\{(X-1)^2=1\}=P\{X=0\}+P\{X=2\}=0.6,$$
$$P\{Z=4\}=P\{(X-1)^2=4\}=P\{X=-1\}=0.3,$$

故 Z 的分布律为

Z	0	1	4
p_k	0.1	0.6	0.3

【例 2-15】 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，试证明 X 的线性函数 $Y=aX+b(a\neq 0)$ 也服从正态分布.

证 分别记 X,Y 的分布函数为 $F_X(x),F_Y(y)$.

设 $a>0$，下面先来求 $F_Y(y)$.

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{Y\leqslant y\}=P\{aX+b\leqslant y\}\\&=P\left\{X\leqslant\frac{y-b}{a}\right\}=F_X\left(\frac{y-b}{a}\right),\end{aligned}$$

将 $F_Y(y)$ 关于 y 求导，得 $Y=aX+b$ 的概率密度为

$$f_Y(y)=f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)\left(\frac{y-b}{a}\right)'=\frac{1}{a}f_X\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

而 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},-\infty<x<+\infty,$$

所以

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}(a\sigma)}e^{-\frac{[y-(a\mu+b)]^2}{2(a\sigma)^2}},-\infty<y<+\infty.$$

若 $a<0$,同样的方法可以求得

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\mid a\mid\sigma}e^{-\frac{[y-(a\mu+b)]^2}{2(a\sigma)^2}},-\infty<y<+\infty,$$

故 $Y=aX+b\sim N(a\mu+b,(a\sigma)^2)$.

特别地,在上例中取 $a=\frac{1}{\sigma},b=-\frac{\mu}{\sigma}$,得

$$Y=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1).$$

这就是上一节引理的结果.

【例 2-16】 设随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x),-\infty<x<+\infty$,求 $Y=X^2$ 的概率密度.

解 分别记 X,Y 的分布函数为 $F_X(x),F_Y(y)$. 先来求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$. 由于 $Y=X^2\geqslant 0$,故当 $y\leqslant 0$ 时,$F_Y(y)=0$. 当 $y>0$ 时,有

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{Y\leqslant y\}=P\{X^2\leqslant y\}\\&=P\{-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}\\&=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y}).\end{aligned}$$

将 $F_Y(y)$ 关于 y 求导,即得 y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})], & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}\qquad 式(1)$$

例如,设 $X\sim N(0,1)$,其概率密度为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},-\infty<x<+\infty,$$

由式(1) 得 $Y=X^2$ 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$$

此时称 Y 服从自由度为 1 的 χ^2 分布.

上述例 2-14、例 2-15 的解法具有普遍性,一般地,我们先求 Y 的分布函数,再求 Y 的概率密度,在求 Y 的分布函数时,设法将其转化为 X 的分布函数. 具体地说,由“$g(X)\leqslant$

y" 解出 X，得到一个与"$g(X) \leqslant y$" 等价的 X 的不等式，并以后者代替"$g(X) \leqslant y$"，这一步是关键，此外，要依据函数"$y = g(x)$" 的值域对分布函数 $F_Y(y)$ 的自变量 y 的定义域（即整个实数轴）进行恰当的划分，并对相应的每个部分区间逐个地讨论，按照这种方法，我们对 $Y = g(X)$，其中 $g(\cdot)$ 是严格单调函数的特殊情况，得出下面的一般结果.

定理 设随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x)$，$-\infty < x < +\infty$，函数 $g(x)$ 处处可导且恒有 $g'(x) > 0$（或恒有 $g'(x) < 0$），则 $Y = g(X)$ 是连续型随机变量，其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]\,|h'(y)|, & \alpha < y < \beta, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \qquad \text{式(2)}$$

其中 $\alpha = \min(g(-\infty), g(+\infty))$，$\beta = \max(g(-\infty), g(+\infty))$，$f(y)$ 是 $g(x)$ 的反函数 .

证 先考虑 $g'(x) > 0$ 的情况，此时，$g(x)$ 在$(-\infty, +\infty)$ 上严格单调增加，它的反函数 $h(y)$ 存在，且在(α, β) 上严格单调增加（或减少）且可导. 分别记 X,Y 的分布函数为 $F_X(x)$，$F_Y(y)$.

由于 $Y = g(X)$ 在(α, β) 上取值，故当 $y \leqslant \alpha$ 时，$F_{Y(y)} = 0$；当 $y \geqslant \beta$ 时，$F_Y(y) = 1$.

当 $\alpha < y < \beta$ 时，

$$F_Y(y) = P\{Y \leqslant y\} = P\{g(X) \leqslant y\} = P\{X \leqslant h(y)\} = F_y[h(y)].$$

将 $F_Y(y)$ 关于 y 求导，即得 Y 的概率密度

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]h'(y), & \alpha < y < \beta, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \qquad \text{式(3)}$$

再考虑 $g'(x) < 0$ 的情况，同样地，有

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)][-h'(y)], & \alpha < y < \beta, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \qquad \text{式(4)}$$

合并式(3) 与式(4) 两式，式(2) 得证.

若 $f(x)$ 在有限区间$[a,b]$ 以外等于零，则只需假设在$[a,b]$ 上恒有 $g'(x) > 0$（或恒有 $g'(x) < 0$），此时

$$\alpha = \min\{g(a), g(b)\}, \beta = \max\{g(a), g(b)\}.$$

【例 2-17】 设随机变量 X 在$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$内服从均匀分布，$Y = \sin X$，试求随机变量 Y 的概率密度.

解 $Y = \sin X$ 对应的函数 $y = g(x) = \sin x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$上恒有 $g'(x) = \cos x > 0$，且有反函数

$$x = f(y) = \arcsin y, h'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} .$$

又 X 的概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

由式(2) 得 $Y = \sin X$ 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}, & -1<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

若在上题中 $X\sim U(0,\pi)$，此时 $y=g(x)=\sin x$ 在 $(0,\pi)$ 上不是单调函数，上述定理失效，应仍按例 2-15 的方法来做，请读者自行求出其结果.

习题 2-5

1. 设随机变量 X 的分布律为

X	0	$\frac{\pi}{2}$	π
p_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

试求(1) $Y=2X-\pi$，(2) $Y=\cos X$ 的分布律.

2. 设随机变量 $X\sim b(3,0.4)$，求 $Y=X^2-2X$ 的分布律.

3. 随机变量 X 在 $(0,1)$ 上服从均匀分布，(1) 求 $Y=\mathrm{e}^X$ 的概率密度；(2) 求 $Y=-2\ln X$ 的概率密度.

4. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $Y=X^2$ 的概率密度.

5. 设随机变量 $X\sim N(0,1)$，求 $Y=|X|$ 的概率密度.

6. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $Y=\sin X$ 的概率密度.

7. 设 X 是在 $[0,1]$ 上取值的连续型随机变量，且 $P\{X\leqslant 0.29\}=0.75$. 如果 $Y=1-X$，试决定 k，使得 $P\{Y\leqslant k\}=0.25$.

思考与练习

1. 袋中有 5 只同样大小的球，编号为 1，2，3，4，5. 从袋中同时取 3 只球，以 X 表示取出的球的最大号码，求 X 的分布律.

2. 甲、乙两名篮球队员轮流投篮，直至某人投中为止，如果甲投中的概率为 0.4，乙投中的概率为 0.6，并假设甲先投，试分别求出投篮终止时甲、乙投篮次数的分布律.

3. 已知甲、乙两箱中装有同种产品，其中甲箱中装有 3 件合格品和 3 件次品，乙箱中

仅装有 3 件合格品，从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱后，求

(1) 乙箱中次品件数 X 的分布律；

(2) 从乙箱中任取一件产品是次品的概率.

4. 有甲、乙两种味道和颜色都极为相似的名酒各 4 杯，如果从中挑 4 杯，能将甲种酒全部挑出来，算是成功一次.

(1) 某人随机地去猜，问他试验成功一次的概率是多少？

(2) 某人声称他通过品尝能区分两种酒，他连续试验 10 次，成功 3 次. 试推断他是猜对的，还是他确有区分能力(设各次试验是相互独立的).

5. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

以 Y 表示对 X 的三次独立重复观察中事件 $\left\{X\leqslant\dfrac{1}{2}\right\}$ 出现的次数，试求 $P\{Y=2\}$.

6. 某仪器装有 3 只独立工作的同型号的电子元件，其寿命都服从参数为 $\dfrac{1}{600}$(单位：h) 的指数分布. 试求在仪器使用的最初 200h 内，至少有一只电子元件损坏的概率.

7. 已知随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=c\mathrm{e}^{-x^2}$，$-\infty<x<+\infty$，试确定常数 c.

8. 设随机变量 X 服从正态分布 $X(2,\sigma^2)$，且 $P\{2<X<4\}=0.3$，求 $P\{X<0\}$.

9. 在电源电压不超过 200 V，在 $200\sim240$ V 和超过 240 V 三种情况下，某种电子元件损坏的概率分别为 0.1，0.001，0.2. 假设电源电压服从 $N(200,25^2)$. 试求：

(1) 电子元件损坏的概率；

(2) 该电子元件损坏时，电源电压在 $200\sim240$ V 的概率.

10. 假设随机变量 X 服从参数为 2 的指数分布，证明 $Y=1-\mathrm{e}^{-2X}$ 在区间(0,1) 上服从均匀分布.

11. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}, & 1<x<8,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$F(x)$ 是 X 的分布函数. 求随机变量 $Y=F(X)$ 的分布函数.